

LOGIČKA ILI BOOLEOVA ALGEBRA



LOGIČKA ILI BOOLEOVA ALGEBRA

- Naziv dobila prema svom tvorcu, engleskom matematičaru George Booleu (1815. – 1864.).



2

LOGIČKA IZJAVA

- Osnovni element logičke algebre - **logička izjava**.
- Zbog jednostavnosti može se označiti jednim slovom (npr. P)
- Za svaku od izjava se može jednoznačno tvrditi da je **istinita** ili **lažna**.

P
"Danas je vedar dan"
"Karlovac je u Dalmaciji"
"1+1=3".

3

IZJAVA

- Istinita izjava:
 - "istina" ili engl. *true*, a zbog jednostavnosti **T** ili "**1**"
- Lažna izjava:
 - "laž" ili engl. *false*, a zbog jednostavnosti **F** ili "**0**"

4

RAČUNALO

- Građeno od elektroničkih sklopova koji razlikuju samo **dva stabilna stanja**.
- Obradba podataka – moguća samo za podatke predočene električkim veličinama u obliku dva stabilna stanja.
- Zaključak → Booleova algebra **dobro primjenjiva** pri konstrukciji i analizi rada digitalnih računala.

5

LOGIČKE OPERACIJE

- S logičkim se izjavama mogu izvoditi razne **logičke operacije**.
- Logičke se operacije zapisuju pomoću **logičkih operatora**.
- Logička algebra - matematički opisuje **odnose između izjava**.

Osnovne logičke operacije
I
ILI
NE

6

LOGIČKA OPERACIJA NE (ENGL. NOT)

- Naziva se i **negacija**.
- Zadatak - **promjena vrijednosti logičke izjave** iz istine u laž i obrnuto.
- Predočit ćemo je simbolom: $\bar{}$

P	$\bar{P}$
Danas je subota.	Danas nije subota.
4 je različito od 4.	4 nije različito od 4.

7

LOGIČKA OPERACIJA NE (ENGL. NOT)

- Logička operacija se može prikazati i pomoću **tablice stanja** ili **tablice istinitosti**.

P	$\bar{P}$
0	1
1	0

8

LOGIČKI OPERATOR I (ENGL. AND)

- Naziva se i **konjunkcija**.
- Zadatak - vratiti istinu **samo ako su obje logičke izjave** uključene u operaciju **istinite**.
- Predočit ćemo je simbolom $\bullet$.

P	Q	$P \bullet Q$
Danas je subota.	Danas je petak.	laž
4 je jednako 4.	4 je veće od 0.	istina

9

LOGIČKI OPERATOR I (ENGL. AND)

- Tablica stanja ili **tablica istinitosti**:

P	Q	$P \bullet Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

10

LOGIČKI OPERATOR ILI (ENGL. OR)

- Naziva se i **disjunkcija**.
- Zadatak - vratiti istinu **ako je bar jedna od logičkih izjava** uključenih u operaciju **istinita**.
- Predočit ćemo je simbolom $+$.

P	Q	$P + Q$
Karlovac je u Dalmaciji.	Karlovac je u Slavoniji.	laž
4 je jednako 4.	4 je manje od 0.	istina

11

LOGIČKI OPERATOR ILI (ENGL. OR)

- Tablica stanja ili **tablica istinitosti**:

P	Q	$P + Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

12

SLOŽENE LOGIČKE OPERACIJE

- Osnovne logičke operacije se mogu **kombinirati u složene**.
- Broj operandi i logičkih operatora može biti proizvoljan.
- Bez obzira na složenost logičke operacije **konačni rezultat** je **istina** ili **laž** (T ili F, 0 ili 1).

13

LOGIČKE OPERACIJE - PRIORITETI

- Pri kombinaciji osnovnih logičkih operacija u složene, treba imati na umu **prioritete**.
- Prioriteti od viših ka nižima:
 - NE,
 - I,
 - ILI.
- Za **promijene prioriteta** koriste se **zagrade**.

14

POJEDNOSTAVNJENJE SLOŽENIH OPERACIJA (MINIMIZACIJA)

- Složene logičke operacije se mogu **pojednostavniti**.
- Smanjuje se složenost, ali **rezultat ostaje isti**.
- Za pojednostavljenje koristi se **algebarski postupak**.

15

PRAVILA ALGEBARSKOG POSTUPKA

Neutralni element
$P \cdot 0 = 0$ $P \cdot 1 = P$ $P \cdot P = P$
$P + 0 = P$ $P + 1 = 1$ $P + P = P$

16

PRAVILA ALGEBARSKOG POSTUPKA

Komplementarnost	
$P \cdot \overline{P} = 0$	$P + \overline{P} = 1$
Komutativnost	
$P \cdot Q = Q \cdot P$	$P + Q = Q + P$
Asocijativnost	
$(P \cdot Q) \cdot R = P \cdot (Q \cdot R)$	$(P + Q) + R = P + (Q + R)$

17

PRAVILA ALGEBARSKOG POSTUPKA

De Morganova pravila	
$\overline{P \cdot Q} = \overline{P} + \overline{Q}$	$\overline{P + Q} = \overline{P} \cdot \overline{Q}$
Involutivnost	
$\overline{(\overline{P})} = P$	

18

PRAVILA ALGEBARSKOG POSTUPKA

Distributivnost
$P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R$
$P + (Q \cdot R) = (P + Q) \cdot (P + R)$

19

SLOŽENA OPERACIJA - TABLICA STANJA

- Složena logička operacija se može prikazati pomoću **tablice stanja**.
- Tablica stanja sadrži sva moguća stanja operanada i sve zadane logičke operacije pa time omogućava **provjeru ispravnosti pojednostavnjenja**.

20

SLOŽENA OPERACIJA - TABLICA STANJA

- Za provjeru treba načiniti:
 - tablicu stanja **za početnu složenu logičku operaciju**,
 - tablicu stanja **za pojednostavnjenje**.
- Ako su sadržaji stupaca koji prikazuju rezultate logičkih operacija jednaki, pojednostavnjenje je napravljeno ispravno.

21

PRIMJER 1

$P + (P \cdot Q)$	$= P + (P \cdot Q)$
	$= P + P \cdot Q$
	$= (P \cdot 1) + (P \cdot Q)$
	$= P \cdot (1 + Q)$
	$= P \cdot 1$
	$= P$

22

PRIMJER 1

$A = P + (P \cdot Q)$			
P	Q	$P \cdot Q$	A
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

23

PRIMJER 1

$A = P + (P \cdot Q)$				$A = P$	
P	Q	$P \cdot Q$	A	A	
0	0	0	0	0	
0	1	0	0	0	
1	0	0	1	1	
1	1	1	1	1	

24

PRIMJER 2

$P \cdot (P + Q)$

$$\begin{aligned}
 &= P \cdot (P + Q) \\
 &= P \cdot P + P \cdot Q \\
 &= P + P \cdot Q \\
 &= (P \cdot 1) + (P \cdot Q) \\
 &= P \cdot (1 + Q) \\
 &= P \cdot 1 \\
 &= P
 \end{aligned}$$

25

PRIMJER 2

$A = P \cdot (P + Q)$			
P	Q	$P + Q$	A
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

26

PRIMJER 2

A = P • (P + Q)			
P	Q	P + Q	A
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

A = P
A
0
0
1
1

27

PRIMJER 3

$P + (\overline{P} \cdot Q)$

$$\begin{aligned}
 &= P + (\overline{P} \cdot Q) \\
 &= (P + \overline{P}) \cdot (P + Q) \\
 &= 1 \cdot (P + Q) \\
 &= P + Q
 \end{aligned}$$

28

PRIMJER 3

$A = P + (\overline{P} \cdot Q)$				
P	Q	$\overline{P}$	$\overline{P} \cdot Q$	A
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

$A = P + Q$		
P	Q	A
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

29

PRIMJER 3

$A = P + (\overline{P} \cdot Q)$				
P	Q	$\overline{P}$	$\overline{P} \cdot Q$	A
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1

$A = P + Q$		
P	Q	A
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

30

PRIMJER 4

$P \cdot (\overline{P} + Q)$

$$\begin{aligned}
 &= P \cdot (\overline{P} + Q) \\
 &= (P \cdot \overline{P}) + (P \cdot Q) \\
 &= 0 + (P \cdot Q) \\
 &= P \cdot Q
 \end{aligned}$$

31

PRIMJER 4

$A = P \cdot (\overline{P} + Q)$					$A = P \cdot Q$		
P	Q	$\overline{P}$	$\overline{P} + Q$	A	P	Q	A
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1

32

PRIMJER 4

$A = P \cdot (\overline{P} + Q)$					$A = P \cdot Q$		
P	Q	$\overline{P}$	$\overline{P} + Q$	A	P	Q	A
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1

33

PRIMJER 5

$A \cdot B + A \cdot C + C$

$$\begin{aligned}
 &= A \cdot B + A \cdot C + C \\
 &= A \cdot B + C \cdot (A + 1) \\
 &= A \cdot B + C \cdot 1 \\
 &= A \cdot B + C
 \end{aligned}$$

34

$P = A \cdot B + A \cdot C + C$					
A	B	C	$A \cdot B$	$A \cdot C$	P
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

35

$P = A \cdot B + C$				
A	B	C	$A \cdot B$	P
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

36

P = A • B + A • C + C						P = A • B + C				
A	B	C	A • B	A • C	P	A	B	C	A • B	P
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

37

PRIMJER 6

$$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C$$

$$= \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C$$

$$= \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot (\overline{C} + C) + A \cdot \overline{B} \cdot (\overline{C} + C)$$

$$= \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot 1 + A \cdot \overline{B} \cdot 1$$

$$= \overline{B} \cdot (\overline{A} + A)$$

$$= \overline{B}$$

38

$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C$										
A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$	$A \cdot \overline{B} \cdot C$	P
0	0	0								
0	0	1								
0	1	0								
0	1	1								
1	0	0								
1	0	1								
1	1	0								
1	1	1								

39

P = $\overline{B}$	
B	P
0	
0	
1	
1	
0	
0	
1	
1	

40

$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C$											P = $\overline{B}$	
A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$	$A \cdot \overline{B} \cdot C$	P	B	P
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

41

PRIMJER 7

$$\overline{A} \cdot (B + C) + \overline{B} \cdot (A + C) + \overline{C} \cdot (A + B)$$

$$= \overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot C + \overline{B} \cdot A + \overline{B} \cdot C + \overline{C} \cdot A + \overline{C} \cdot B$$

$$= \overline{A} \cdot (B + C) + \overline{B} \cdot (C + C) + \overline{C} \cdot (A + A)$$

$$= \overline{A} \cdot B + \overline{C} = (\overline{A} \cdot B) + \overline{C}$$

$$= \overline{A} \cdot B + \overline{C} = \overline{A \cdot B \cdot C}$$

77/11

42

PRIMJER 8

$$A \cdot (B + C) + \overline{B} \cdot (A + C) + C \cdot (\overline{A} + \overline{B})$$

$$= A \cdot B + A \cdot C + \overline{B} \cdot A + \overline{B} \cdot C + C \cdot \overline{A} + C \cdot \overline{B}$$

$$= A \cdot (B + \overline{B}) + C \cdot (A + \overline{A}) + C \cdot (\overline{B} + \overline{B})$$

$$= A + C + C = A + C$$

78/14

43

PRIMJER 9

$$\overline{P + Q}$$

$$= \overline{P} \cdot \overline{Q}$$

$$= \overline{P \cdot Q}$$

$$= P \cdot Q$$

44

PRIMJER 9

$A = \overline{P + Q}$					
P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P + Q}$	A
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

$A = P \cdot Q$		
P	Q	A
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

45

PRIMJER 9

$A = \overline{P + Q}$					
P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P + Q}$	A
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1

$A = P \cdot Q$		
P	Q	A
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

46

PRIMJER 10

$$\overline{A \cdot B + A + B}$$

$$= \overline{A + B + A \cdot \overline{B}}$$

$$= \overline{A \cdot (1 + B) + B}$$

$$= \overline{A + B}$$

$$= \overline{A \cdot B}$$

78/13

47

PRIMJER 11

$$\overline{A \cdot B \cdot C + C \cdot \overline{B} + A \cdot B + A + B}$$

$$= \overline{A \cdot B \cdot C + C \cdot \overline{B} + A \cdot B + A \cdot \overline{B}}$$

$$= \overline{A \cdot B \cdot C + C \cdot \overline{B} + B \cdot (A + \overline{A})}$$

$$= \overline{B \cdot (A \cdot C + 1) + C \cdot \overline{B}}$$

$$= \overline{B + C \cdot \overline{B}}$$

66/1

48

PRIMJER 12

$$\overline{A} \cdot C \cdot (A + B) + B \cdot \overline{C} \cdot (\overline{A} + B)$$

$$= \overline{A} \cdot C \cdot A + \overline{A} \cdot C \cdot B + B \cdot \overline{C} \cdot A + B \cdot \overline{C} \cdot B$$

$$= \overline{A} \cdot B \cdot (C + \overline{C})$$

$$= \overline{A} \cdot B$$

$$= A + B$$

77/12

49

PRIMJER 13

$$A \cdot (\overline{B} + C) \cdot (\overline{A} + \overline{B} \cdot \overline{C})$$

$$= A + (B + C) \cdot (\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C})$$

$$= (\overline{A} + B + C) \cdot (\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C})$$

$$= \overline{A} \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + C \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

$$= \overline{A} \cdot B \cdot C$$

80/18

50

PRIMJER 14A

$$A \cdot (\overline{B} + \overline{B}) \cdot \overline{C} + B \cdot (\overline{A} + C) + \overline{A} \cdot (B \cdot C + \overline{A})$$

$$= A \cdot \overline{C} + B \cdot \overline{A} + B \cdot C = \overline{A} + \overline{C} + B \cdot \overline{A} + B \cdot C$$

$$= \overline{A} \cdot (1 + B) + C \cdot (1 + B) = \overline{A} + C = A \cdot \overline{C}$$

$$= A \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot (B \cdot C + \overline{A})$$

79/17

51

PRIMJER 14B

$$= A \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot (B \cdot C + \overline{A})$$

$$= A \cdot \overline{C} \cdot \overline{A} \cdot (B \cdot C + \overline{A})$$

$$= (\overline{A} + C) \cdot (\overline{A} + (B \cdot C + \overline{A})) = (\overline{A} + C) \cdot (\overline{A} + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{A})$$

$$= (\overline{A} + C) \cdot (A \cdot (1 + B \cdot C)) = (\overline{A} + C) \cdot A$$

$$= \overline{A} \cdot A + C \cdot A = C \cdot A$$

52